**Raccolta di esercizi di PL e PLI**

**--------------------------------------------------------------------------------------------------------------**

Un’azienda manifatturiera realizza due prodotti (A e B), utilizzando due materie prime P1 e P2. Per la realizzazione di un lotto di prodotto A, sono necessarie 4 unità di materia prima P1 e 7 unità di materia prima P2. Per la realizzazione di un lotto di prodotto B sono necessarie 10 unità di materia prima P1 e 7 unità di materia prima P2.

Per sfruttare le economie di scala, la materia prima P1 deve essere utilizzata in quantità almeno pari a 40 unità settimanali. Vincoli di magazzino, invece, impongono che la materia prima P2 deve essere utilizzata in quantità al massimo pari a 49 unità settimanali.

Vincoli tecnologici impongono infine che il rapporto tra la produzione settimanale del prodotto A e il prodotto B sia compreso tra ½ e 4.

Tenendo conto del fatto che il profitto unitario di un lotto di A è il doppio del profitto unitario di un lotto di B, si vuole determinare il piano di lavoro settimanale che consenta di massimizzare il profitto totale di produzione.

Con riferimento al problema descritto:

1. si disegni il dominio di ammissibilità del problema e la **funzione obiettivo**.
2. si scriva la composizione della soluzione basica ammissibile per ogni vertice del dominio;
3. si risolva graficamente il problema, individuando il vertice ottimo;
4. si risolva il problema analiticamente con l'algoritmo del simplesso standard, eliminando dal modello eventuali vincoli ridondanti e rilassando i vincoli di interezza.

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione lineare e la tabella del simplesso riportata, relativa ad uno dei suoi vertici:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x1* | *x2* | *y1* | *y2* | *h2* | *-z* | *b* |
| 4 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 20 |
| 1 | -1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 2 |
| 4-M | 1+M | 0 | M | 0 | 1 | -2M |

*Min z = 4 x1 + x2*

*s.a.*

*4 x1 + 5 x2 ≤ 20*

*x1 - x2 ≥ 2*

*x1, x2 ≥ 0*

a) si disegni il dominio di ammissibilità del problema e si risolva graficamente il problema;

b) si indichi, per ciascuno dei vertici del dominio, la composizione della soluzione basica ammissibile ad esso associata e si evidenzino eventuali s.b.a. degeneri.

c) si effettui 1 step dall’algoritmo del simplesso a partire dalla tabella riportata e si identifichi il vertice di partenza e quello di arrivo;

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Si formuli il seguente problema di programmazione lineare e lo si risolva utilizzando un solutore lineare.

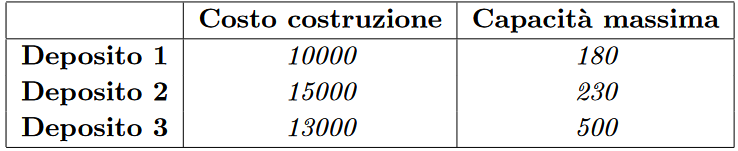
Un’agenzia di recapiti deve caricare i propri camion per effettuare le spedizioni odierne. La merce da consegnare è composta da scatole di 4 tipi diversi, ciascuno caratterizzato da un certo volume (inteso come numero di pallet) e peso e da un certo numero di esemplari da recapitare, come da tabella. Per la consegna delle merci la ditta dispone di 7 veicoli identici, ciascuno avente capacità di 20 pallet in volume e di 40

0 Kg in peso. Dato che il costo dell'utilizzo giornaliero di ogni veicolo viene stimato in 200 K€ l'agenzia desidera cercare di minimizzare il numero di veicoli impiegati nella giornata odierna.

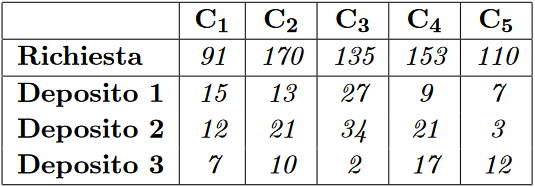
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Scatola | #Esemplari | Volume | Peso |
| 1 | 3 | 8 | 70 |
| 2 | 5 | 7 | 180 |
| 3 | 2 | 3 | 90 |
| 4 | 2 | 4 | 110 |

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Una compagnia di distribuzione deve rifornire i suoi clienti C1, C2, C3, C4 e C5 che sono dislocati in località diverse di una regione. Per ottimizzare il rifornimento, la compagnia vuole costruire un numero di depositi non superiore a due disponendo di tre possibili zone dove costruirli. A seconda della zona in cui vengono costruiti, i tre possibili depositi hanno un costo di costruzione e una capacità massima diversi. La tabella che segue riporta questi costi in migliaia di euro e queste capacità in tonnellate.



Il quantitativo di merce (in tonnellate) richiesto da ciascun cliente è riportato nella tabella che segue insieme ai costi (in migliaia di euro) del trasporto di una unità di merce da ciascuno dei possibili depositi a ciascun cliente.



Costruire un modello lineare che rappresenti il problema descritto per soddisfare esattamente la richiesta minimizzando il costo complessivo e supponendo che non ci siano limitazioni sulle quantità massime di merci trasportabili.

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | C | D | E |
| 1 | 41 | 33 | 24 | 29 | 58 |
| 2 | 25 | 12 | 22 | 58 | 41 |
| 3 | 21 | 43 | 34 | 54 | 18 |
| 4 | 21 | 42 | 39 | 26 | 18 |
| 5 | 11 | 23 | 24 | 29 | 53 |
| 6 | 47 | 23 | 19 | 16 | 31 |
| 7 | 37 | 47 | 51 | 26 | 19 |

Secondo i dati ISTAT, la provincia di Torino può essere suddivisa in 7 centri di domanda 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Un’azienda ha individuato 5 punti A, B, C, D ed E, nei quali potrebbero essere costruiti nuovi ipermercati per soddisfare la domanda dei sette centri. Tale impresa è interessata a soddisfare la domanda sopramenzionata in modo tale che i clienti non percorrano più di 30 minuti di auto per raggiungere almeno uno dei centri di vendita. Nella tabella seguente viene indicato il tempo auto necessario per raggiungere un punto di offerta da un punto di domanda.

L’apertura dei centri vendita costa rispettivamente (in milioni di euro): A = 310, B = 250, C = 260, D = 330, E = 280.

Scrivere il modello in programmazione lineare intera che minimizza i costi di apertura dei centri vendita, garantendo il fatto che tutti i punti di domanda vengano serviti.

Si supponga che l’azienda ritenga attivabile il centro B solo se almeno uno dei centri C o D sia attivato. Come cambia il modello di programmazione lineare intera?

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Uno studente di Metodi di Ottimizzazione intende portare con sé all’esame scritto alcuni foglietti di appunti delle dimensioni totali di 95 cm2. L’esame comprende 10 diversi argomenti e lo studente ha già preparato per ciascuno di essi delle note riassuntive, che non possono essere ulteriormente ridotte senza perdere di significato. La tabella fornita riporta, per ogni argomento, lo spazio richiesto per tali note e il peso relativo, nell’ambito dell’esame, dei contenuti trattati.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Argomento | Spazio richiesto (cm2) | % copertura dell’esame |
| 1 | 10 | 5 |
| 2 | 18 | 10 |
| 3 | 22 | 15 |
| 4 | 16 | 10 |
| 5 | 14 | 10 |
| 6 | 20 | 5 |
| 7 | 32 | 20 |
| 8 | 12 | 5 |
| 9 | 12 | 15 |
| 10 | 10 | 5 |

Lo studente è poco preparato sugli argomenti 2,3,7,8 e 9 e vorrebbe pertanto portare all’esame le note riassuntive di almeno tre di essi. Inoltre, ritiene poco utile avere contemporaneamente nei foglietti sia le note relative all’argomento 9, sia quelle relative all’argomento 10. Infine, ha valutato che le note sull’argomento 5 risultano inutili a meno che non vengano incluse nel foglio anche le note dell’argomento 4.

Si formuli un modello di ottimizzazione lineare intera per individuare quali argomenti conviene includere nei foglietti.

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

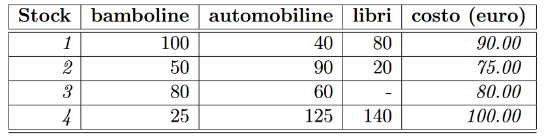
Sia data una macchina a capacità unitaria (può eseguire un lavoro per volta) che deve effettuare tre lavori aventi tempo di processamento p1= 2, p2= 3, p3= 4. Formulare il problema di scheduling che consenta di determinare la sequenza che minimizza la media dei tempi di completamento dei lavori, tenendo conto che, se il primo lavoro precede il secondo, l’inizio del terzo lavoro deve aspettare un tempo ∆3= 2 dopo il termine del secondo lavoro, mentre, se il terzo lavoro precede il primo, l’inizio del secondo deve attendere un tempo ∆2= 3 dopo il termine del primo lavoro.

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Dato un grafo G= (N, A), non orientato, si consideri il seguente problema. I nodi del grafo rappresentano città che devono essere difese da pattuglie. Le pattuglie possono essere dislocate in corrispondenza dei nodi del grafo, e possono essere di due tipi, fisse e mobili. Una pattuglia fissa dislocata nella città i difende solo la città i. Una pattuglia mobile dislocata nella città i difende, oltre ad i, anche tutte le città adiacenti, ossia difende {i}∪δ(i). Dislocare una pattuglia fissa ha un costo pari a 2, una mobile ha costo 3. Il problema è quello di difendere tutti i nodi del grafo al costo minimo. Formulare il problema come programmazione lineare a numeri interi.

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Babbo Natale deve organizzare gli acquisti per le prossime festività. Sono arrivate richieste di 15000 bamboline, 17000 automobiline 12000 libri. La crisi economica spinge Babbo Natale ad approfittare di alcuni stock di giocattoli, la cui composizione e il cui prezzo sono sintetizzati nella seguente tabella:



Babbo Natale farà i suoi acquisti da solo e, vista la vicinanza del Natale, non potrà acquistare sia pacchi dello stock 1 sia pacchi dello stock 2, perché i relativi punti di vendita sono molto distanti tra loro. Aiutiamo Babbo Natale ad effettuare gli acquisti nel modo più economico possibile, attraverso la formulazione di un modello di programmazione lineare del problema e tenendo anche conto che Babbo Natale riceve uno sconto di 2000 euro se il numero complessivo di stock 3 e stock 4 acquistati è superiore a 120.

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Si risolva con il metodo Branch and Bound il seguente problema di programmazione lineare intera:

*Max z = x1 + x2*

*s.t.*

*2 x1 + 5 x2 <= 16*

*6 x1 + 5 x2 <= 30*

*x1, x2 intere*

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera e lo si risolva con il metodo del Branch and Bound. Si risolvano in maniera grafica i rilassamenti lineari dei problemi corrispondenti ai singoli nodi dell’albero di enumerazione.

(intere)

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Una banca di investimenti dispone di 14 milioni di euro, e investe primariamente in quattro tipi di investimento (numerati 1,2,3,4). La tabella sotto mostra, per ogni investimento, il ritorno netto e il capitale da investire.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Investimento | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Ritorno netto | 16 | 22 | 12 | 8 |
| Capitale da investire | 5 | 7 | 4 | 3 |

a) Si formuli un modello di PLI per risolvere il problema di scegliere gli investimenti da effettuare in modo da massimizzare il ritorno totale (gli investimenti possono essere scelti o non scelti, ma non è possibile effettuare un investimento parziale).

b) Risolvere il problema mediante l’algoritmo del Branch-and-Bound.

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Una industria chimica impiega due tipi di solventi (1 e 2) per produrre giornalmente due tipi di vernici (A e B). E’ necessario utilizzare 6 unità di solvente 1 e 1 unità di solvente 2 per produrre 1 quintale di vernice A. E’ necessario inoltre utilizzare 1 unità di solvente 1 e 3 unità di solvente 2 per produrre 1 quintale di vernice B. Per sfruttare le economie di scala bisogna utilizzare ogni giorno almeno 12 unità di solvente 1 e almeno 12 unità di solvente 2. Si devono produrre in totale tra A e B al massimo 9 quintali di vernice. Il costo unitario di produzione di B è uguale al costo unitario di A. Si vuole determinare il piano di produzione giornaliero di A e B che rende minimo il costo totale di produzione.

In relazione al problema descritto:

1. si scriva il modello di programmazione lineare del problema;
2. si risolva graficamente il problema, disegnando il dominio delle soluzioni ammissibili del modello e la **funzione obiettivo**, riportando la scala sugli assi coordinati;

ipotizzando che le variabili del problema siano intere, si risolva il problema di programmazione lineare intera con il metodo Branch and Bound e l’ausilio dell’analisi grafica

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Per l'assemblaggio di telecomandi, si hanno a disposizione 10 moduli display, 18 moduli di logica di controllo, 12 trasmettitori, 21 tastierini, 9 moduli di navigazione e 10 led. I telecomandi sono di due tipi. Il tipo A richiede un display, un modulo di navigazione, 2 tastierini, 2 moduli di logica, un trasmettitore e un led. Il tipo B

richiede 2 display, 3 tastierini, 2 moduli di logica e 3 trasmettitori. Considerando che il tipo A permette un guadagno netto di 3 euro e il tipo B di 8 euro, determinare la produzione che massimizza il guadagno.

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

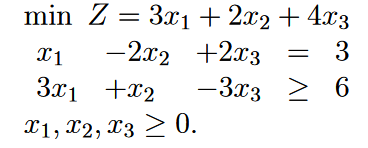
Dato il seguente problema di programmazione lineare:

a) si risolva il problema con l’algoritmo del simplesso e il metodo delle due fasi;

b) si verifichi il risultato ottenuto nel punto (a), risolvendo graficamente il problema, disegnando il dominio di ammissibilità e le linee di livello della funzione obiettivo.

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Risolvere il seguente problema di PL utilizzando l’algoritmo del simplesso in due fasi:



----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Si risolva il seguente problema di zaino mediante il metodo di Branch-and-Bound adottando una strategia di esplorazione dell’albero di tipo best first. Si consideri come figlio di sinistra il nodo corrispondente al sottoproblema con vincolo xi = 0, dove la variabile xi è la variabile che assume valore frazionario nella soluzione del rilassamento lineare.

max z = 10 x1 + 12 x2 + 5 x3 + 7 x4+ 9x5

s.a.

5 x1 + 8 x2 + 6 x3 + 2 x4+ 7 x5 ≤ 14

xi={0,1} per i = 1,...,5

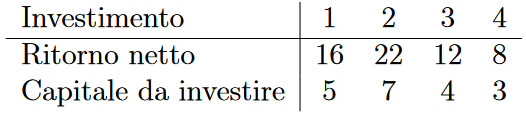
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Un’azienda produce due prodotti A e B. Vincoli tecnologici impongono che la produzione totale sia al massimo di 10 tonnellate. Vincoli di mercato impongono invece che la produzione di A deve superare la produzione di B di esattamente 2.5 tonnellate e che la produzione di B sia al massimo pari a 7 tonnellate. I profitti unitari di A e B sono nel rapporto 2/3. Si vuole conoscere il piano di produzione che massimizza il profitto totale. Con riferimento al problema descritto:

1. si formuli il problema come problema di programmazione lineare
2. si disegni il dominio di ammissibilità del problema e una linea di livello della funzione obiettivo
3. si indichi, per ciascuno dei vertici del dominio, la composizione della soluzione basica ammissibile ad esso associata
4. si risolva graficamente il problema, individuando il vertice ottimo.
5. si eliminino eventuali vincoli ridondanti
6. si risolva il problema analiticamente con l’algoritmo del simplesso e il metodo del bigM

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Una banca di investimenti dispone di 14 milioni di euro e investe primariamente in quattro tipi di investimento (numerati 1, 2, 3, 4). La seguente tabella indica, per ogni investimento, il ritorno netto e il capitale da investire.



Si formuli un modello di PLI per risolvere il problema di scegliere gli investimenti da effettuare in modo da massimizzare il ritorno totale (gli investimenti possono essere scelti o non scelti, ma non è possibile effettuare un investimento parziale). Si risolva il modello mediante un algoritmo di Branch-and-Bound.

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Un’azienda produce due prodotti, P1 ed P2. Per la produzione di P1 e P2 si utilizzano 2 risorse, R1 e R2. Per la produzione di un’unità di P1 sono necessarie 6 unità di R1 e 9 unità di R2. Per la produzione di un’unità di P2 sono necessarie 10 unità di R1 e 6 R2. Le risorse R1 e R2 sono disponibili al massimo in 80 e 54 unità. Vincoli di mercato impongono inoltre che la produzione mensile di P1 superi quella di P2 di almeno 2 unità e che la produzione mensile totale (P1 + P2) sia di almeno 5 unità. Sapendo che i costi di P1 ed P2 sono nel rapporto 5:2, si vogliono conoscere le produzioni mensili di P1 e P2 che minimizzano il costo totale di produzione. Con riferimento al problema descritto:

a) si scriva il modello di programmazione lineare del problema;

b) si disegni il dominio di ammissibilità del problema e la funzione obiettivo;

c) si indichi, per ciascuno dei vertici del dominio, la composizione della soluzione basica ammissibile ad esso associata e si evidenzino eventuali s.b.a. degeneri;

d) si risolva graficamente il problema, individuando il vertice ottimo

e) si eliminino eventuali vincoli ridondanti

f) si risolva il problema analiticamente con l’algoritmo del simplesso e il metodo del bigM

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Dato il seguente problema di programmazione lineare:

b) si disegni il dominio di ammissibilità del problema e la funzione obiettivo;

c) si indichi, per ciascuno dei vertici del dominio, la composizione della s.b.a. ad esso associata;

d) si risolva graficamente il problema, individuando il vertice ottimo e calcolandone le coordinate e il valore di funzione obiettivo:

e) si risolva il problema con l’algoritmo del simplesso e il metodo delle due fasi.

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

calcolare la soluzione ottima del problema applicando il metodo del branch and bound. Calcolare il valore del rilassamento continuo per via grafica ad ogni nodo dell’albero di enumerazione.

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Risolvere il seguente problema di PL utilizzando l’algoritmo del simplesso in due fasi:

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

a) Risolvere il rilassamento continuo del problema per via geometrica.

b) Ricavare una stima per eccesso della soluzione ottima.

c) Risolvere il problema originale con un metodo di branch-and-bound risolvendo per via geometrica i problemi corrispondenti ai vari nodi dell’albero di decisione corrispondente.

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Si consideri il problema di ottimizzazione:

1. Risolvere il problema utilizzando l’algoritmo del simplesso in due fasi.
2. Verificare la soluzione ottenuta al punto 1 risolvendo graficamente il problema, determinando il valore ottimale di tutte le variabili del problema e della funzione obiettivo.
3. Specificare cosa accadrebbe se il problema fosse a massimizzare.
4. Identificare per quale valore di c2 (coefficiente della variabile x2 nella funzione obiettivo) il problema presenta più soluzioni ottime.

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

a) Lo si risolva con il metodo del branch and Bound.

b) Si riporti l’albero di enumerazione ottenuto: a fianco di ciascun nodo, ove possibile, si indichino le coordinate del punto di ottimo del rilassamento continuo, il valore della funzione obiettivo, lower e upper bound disponibili.